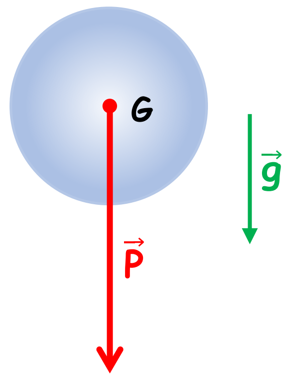
# MOUVEMENT DANS UN CHAMP UNIFORME

## 1- Interaction gravitationnelle

### 1.1- Le poids




En première approximation, on peut dire que le poids $\vec{P}$ d'un objet est égal à la force d'attraction gravitationnelle que la Terre exerce sur lui.

Cette force de pesanteur est représentée par un vecteur $\vec{P}$ possédant:
- Une origine: le centre d'inertie G du corps.
- Une direction: la verticale passant par G.
- Un sens: du haut vers le bas.
- Une intensité: **P = m g**.

***Remarque:*** *En réalité, le poids n'est pas rigoureusement confondu avec la force de gravitation.*

En un point donné M, au voisinage de la Terre, le poids $\vec{P}$ d'un objet de masse m peut s'écrire:

$$\vec{P} = m.\vec{g}$$

$\vec{P}$: **Vecteur poids (N)**
m: **Masse (kg)**
$\vec{g}$: **Vecteur intensité de la pesenteur $(N.kg^{-1})$**

Le vecteur $\vec{g}$ est, par définition, le vecteur champ de pesanteur terrestre au point M considéré. Ce vecteur champ de pesanteur terrestre $\vec{g}$ possède:
- Une origine: le point M.
- Une direction: la verticale passant par M.
- Un sens: du haut vers le bas.
- Une valeur: l'intensité **g** de la pesanteur au point M

La valeur de l'intensité g de la pesanteur dépend de la latitude du point M où l'on opère et de son altitude:

**g = 9,78N/kg** à l'équateur, au niveau de la mer.
**g = 9,83N/kg** au pôle nord, au niveau de la mer.

La valeur de l'intensité **g** diminue avec l'altitude d'environ 1% tous les 30km.

***Remarque:*** *Pour faciliter les calculs, on pourra prendre, en première approximation, une valeur de l'intensité de la pesanteur **g** de **10N/kg**.*

Dans un domaine restreint au voisinage de la Terre (dimensions de l'ordre de quelques kilomètres), on peut considérer que le champ de pesanteur est uniforme: le vecteur champ de pesanteur $\vec{g}$ a même direction, même sens et même valeur en tout point de ce domaine restreint.

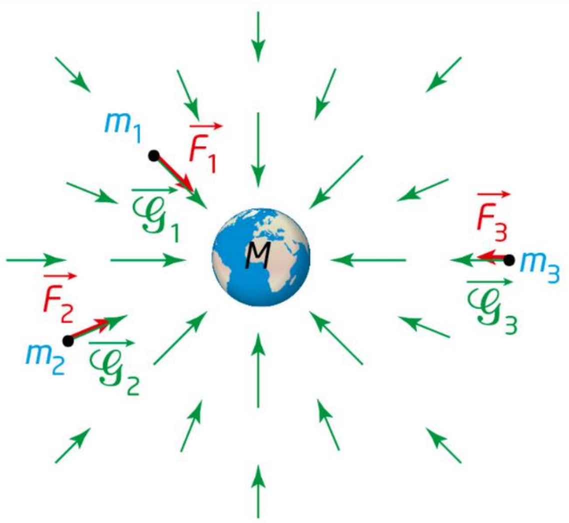
### 1.2- Le champ de gravitation

Il s'agit d'un champ traduisant l'influence gravitationnelle d'un corps doté d'une masse M sur l'espace qui l'entoure.

Le champ de gravitation que produit en un point de l'espace une masse ponctuelle M possède les caractéristiques suivantes:

- Ce champ a même direction et même sens que la force gravitationnelle **F** qu'exercerait cette masse M sur une masse ponctuelle m.
- Ce champ a pour expression vectorielle:

$$\vec{G} = \frac{\vec{F}}{m}$$




Les lignes de champ sont orientées vers le centre de gravité du corps produisant le champ.

Dans le cas d'un corps à symétrie sphérique (comme une planète), les lignes de champ passent par le centre de la sphère.

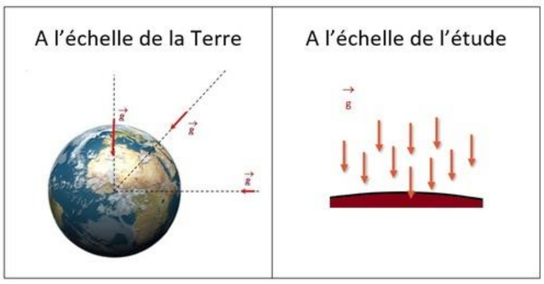
### 1.3- Champ de pesanteur

Le champ de pesanteur est un cas particulier de champ de gravitation, ces champs sont assimilables l'un à l'autre lorsque la force de gravitation est assimilable au poids c'est à dire:

- Pour un espace proche de la surface d'un astre.
- Lorsque cet espace a une étendue limitée (de faibles dimensions par rapport à la circonférence de l'astre).
- Lorsque cet espace à une hauteur négligeable devant le rayon de l'astre (quelques centaines de mètres voire quelques kilomètres pour la Terre).
- Lorsque la force de gravitation (assimilable au poids) s'exprime par la relation **P = m.g**.

C'est un champ qui peut être considéré comme uniforme et qui possède les caractéristiques suivantes:

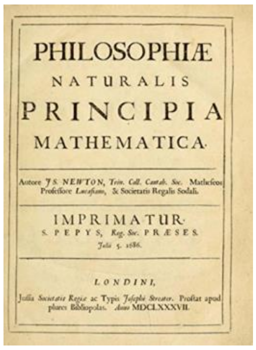
- Sa direction est la verticale du lieu.
- Son sens est vers le bas.
- Sa valeur est égale à l'intensité de la pesanteur **g** (**g = 9,81 N/kg** à la surface de la Terre).



Ce champ est défini comme le rapport du poids $\vec{P}$ d'un système par la masse **m** de ce système soit:

$$\vec{g} = \frac{\vec{P}}{m}$$

### 1.4- Loi de gravitation universelle



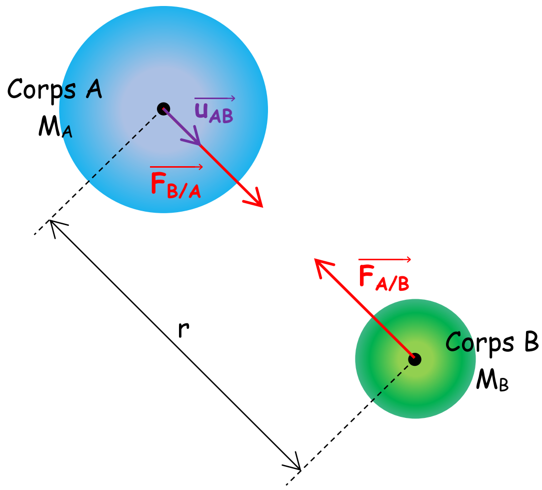

La loi de la gravitation universelle correspond à l'expression de la valeur de la force de gravitation s'exerçant entre deux corps.

Elle est formulée par Isaac Newton qui fut le premier à faire l'hypothèse que la gravitation terrestre n'est pas limitée à sa surface mais qu'elle peut s'étendre plus loin, il suppose qu'elle est universelle, peut se manifester jusqu'aux astres et provoquer leurs mouvements.

La force de gravitation est une force répartie en volume, c'est à dire que chaque particule du système subit cette force mais on peut considérer que la résultante s'applique en point particulier appelé centre de gravité ***G***, ce point est en général confondu avec un autre point appelé centre d'inertie qui correspond au barycentre des masses du système, soit le point "le plus central de la répartition de masse". Pour un système homogène ou pour un système à symétrie centrale alors il correspond simplement au centre géométrique.

**Deux objets ponctuels A et B de masse $M_A$ et $M_B$, exercent l'un sur l'autre une force attractive, dirigée suivant la droite qui les joint.**

**Cette force varie proportionnellement au produit de leurs masses et à l'inverse du carré de la distance r qui les sépare.**




$$\overrightarrow{F_{A/B}} = -\overrightarrow{F_{B/A}} = -G.\frac{M_A.M_B}{r^2}.\overrightarrow{u_{AB}}$$

$$F_{A/B} = F_{B/A} = G.\frac{M_A.M_B}{r^2}$$

**$\overrightarrow{F_{A/B}}$: Force exercée par A sur B (N)**
**$\overrightarrow{F_{B/A}}$: Force exercée par B sur A (N)**
**G: Constante de gravitation ($G=6,67.10^{-11} N.m^2.kg^{-2}$)**
**$M_A$: Masse du corps A (kg)**
**$M_B$: Masse du corps B (kg)**
**r: Distance entre A et B**
**$\overrightarrow{u_{AB}}$: Vecteur unitaire dirigé de A vers B**

Cette relation est vraie pour deux objets à répartition sphérique de masse. La distance r est alors égale à la distance séparant le centre des deux sphères.

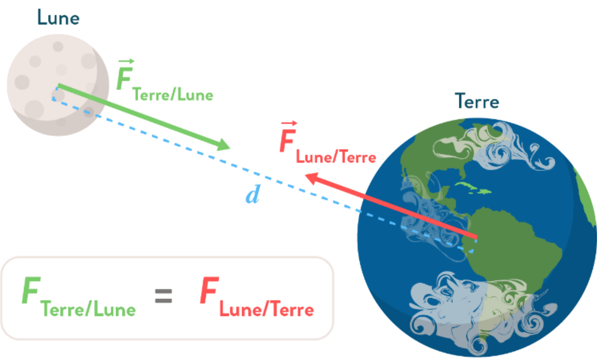
***Attention:*** *Les premières applications de cette relation peuvent être laborieuses, voici donc une checklist qui permettant d'éviter les erreurs les plus courantes:*

- *Vérifier que les masses sont exprimées en kilogramme.*
- *Vérifier que la distance est exprimée en mètre (et non pas en kilomètre).*
- *Vérifier que la distance utilisée est bien celle qui sépare les centres de gravité et non pas celle séparant la surface des corps.*
- *Penser à indiquer le carré de la distance et à en tenir compte dans le calcul.*
- *Lorsque le calcul est effectué à la calculatrice penser à placer le numérateur et le dénominateur entre parenthèses.*
- *Penser à présenter le résultat en utilisant la notation scientifique.*
- *Vérifier l'ordre de grandeur obtenu afin de déceler une éventuelle incohérence révélatrice d'une erreur.*

La Terre et la Lune exercent l'une sur l'autre des forces ayant la même direction mais de sens opposées et de même valeur:

$$\overrightarrow{F_{Terre/Lune}} = -\overrightarrow{F_{Lune/Terre}}$$

$$F = F_{Terre/Lune} = F_{Lune/Terre} = G \times \frac{M_T \times M_L}{d^2}$$




- **F: Force d'interaction gravitationnelle (N)**
- **G: Constante gravitationnelle ($G=6,67.10^{-11}N.m^2.kg^{-2}$)**
- **$M_T$: Masse de la Terre (kg)**
- **$M_L$: Masse de la Lune (kg)**
- **d: Distance Terre-Lune (m)**

**Influence de la masse:** La force de gravitation est proportionnelle à chacune des deux masses, par conséquent:

- Une masse deux fois plus élevée (pour l'un des deux corps) correspond à une force de gravitation deux fois plus élevée.
- Une masse trois fois plus élevée (pour l'un des deux corps) correspond à une force de gravitation trois fois plus élevée.

**Influence de la distance:** La force de gravitation a une valeur inversement proportionnelle au carré de la distance qui sépare les centres des deux corps. Par conséquent:

- Plus cette distance est élevée et plus la force de gravitation est faible.
- Si la distance est doublée alors la valeur de la force de gravitation est divisée par 4.
- Si la distance est triplée alors la valeur de la force est divisée par 9.

***Remarque:*** *La force de gravitation diminue très rapidement avec la distance mais ne s'annule jamais totalement, un système subi donc toujours une force gravitationnelle d'un autre système, quel que soit sa distance, même s'il est situé à l'autre bout de l'univers!*

Cette relation a de multiples applications:
- Calculer la masse d'une planète.
- Calculer la distance séparant une planète de son étoile.

Cette force s'exerce entre tous les corps possédant une masse mais sa valeur est en général trop faible pour que ses effets soient remarquables lorsque les deux systèmes ont masse insuffisante: particules subatomiques, atomes, molécules, objets à l'échelle humaine etc.

Lorsque la gravitation s'exerce entre un astre et un corps de masse réduite alors elle est assimilée à ce que l'on appelle le "poids" de ce corps. Elle le maintien à sa surface et provoque sa chute lorsqu'il s'en éloigne.
Lorsque la gravitation s'exerce entre deux astres elle peut, suivant les conditions, soit provoquer leur collision ou permettre à l'astre de masse la plus petite d'adopter une orbite autour de l'astre le plus massique (ce dernier cas est possible si le "petit astre" possède un mouvement adapté).

## 2- Interactions électrostatiques

### 2.1- Charges électriques

Un objet peut posséder une charge électrique **q** dont le signe est positif ou négatif.

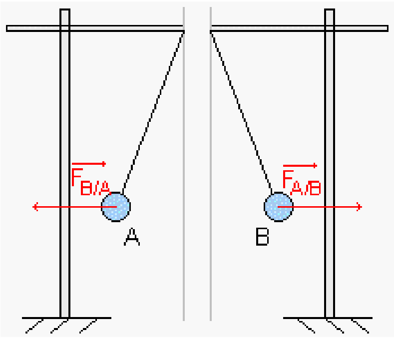
La charge s'exprime en Coulomb, dont le symbole est C.

La plus petite charge qu'il est possible d'avoir est la charge élémentaire **e** qui a pour valeur:

$$e=1,6.10^{-19}C$$

### 2.2- Loi de Coulomb

Deux pendules portant des charges de même signe se repoussent, tandis que deux pendules portant des charges de signes opposés s'attirent.



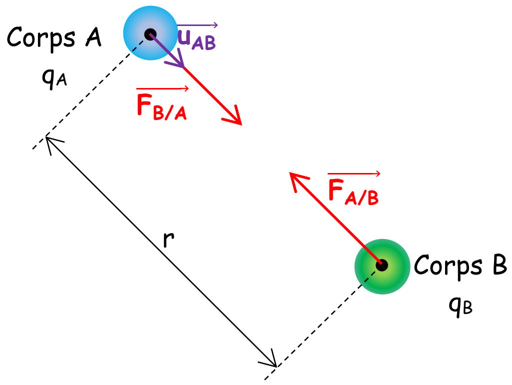

Les pendules exercent l'un sur l'autre des forces opposées:
- **A** exerce sur **B** une force $\overrightarrow{F_{A/B}}$.
- **B** exerce sur **A** une force $\overrightarrow{F_{B/A}}$.
- $\overrightarrow{F_{B/A}} = - \overrightarrow{F_{A/B}}$
- $F_{B/A} = F_{A/B}$

**Deux corps ponctuels A et B portant respectivement les charges $q_A$ et $q_B$ et séparées d'une distance r = AB sont soumis à deux forces opposées de même valeur.**

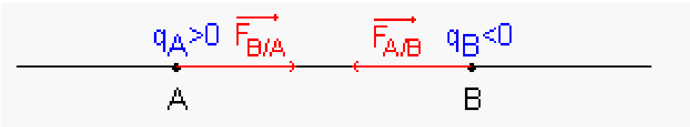
$$\overrightarrow{F_{A/B}} = -\overrightarrow{F_{B/A}} = -K \cdot \frac{q_A \cdot q_B}{r^2} \cdot \overrightarrow{u_{AB}}$$

$$F_{B/A} = F_{A/B} = K \cdot \frac{q_A \cdot q_B}{r^2}$$

F: Force (N)
$q_A$ et $q_B$: Charges électriques (C)
r: Distance entre les charges (m)
K: Constante de Coulomb ($k=9.10^9$ $N.m^2/C$)
$\overrightarrow{u_{AB}}$: Vecteur unitaire dirigé de A vers B




Ces deux forces $\overrightarrow{F_{B/A}}$ et $\overrightarrow{F_{A/B}}$ qui ont pour droite d'action la droite **AB**, sont attractives si les charges sont de signes contraires et répulsives si les charges sont de même signe.



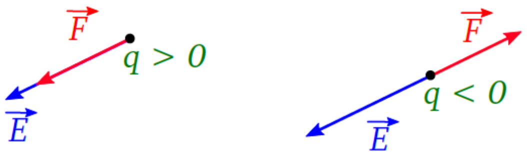


## 2.3- Champ électrostatique

**Si on place une charge électrique q dans une zone de l'espace où règne en chaque point un champ électrostatique $\vec{E}$ alors la charge électrique q va subir une force $\vec{F}$ telle que:**

$$\vec{F} = q.\vec{E}$$

$\vec{F}$: Force électrostatique (N)
q: Charge électrique (C)
$\vec{E}$: Champ électrique ($V.m^{-1}$)



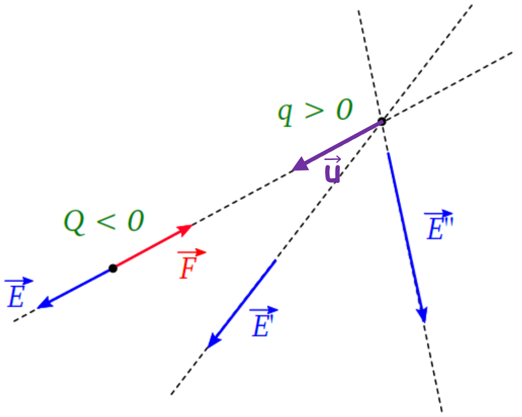

Un champ électrostatique $\vec{E}$ est créé par une ou plusieurs charges électriques placées dans l'espace. Pour une charge unique **q**, on peut trouver facilement l'expression du champ créé.

Si on place à proximité une autre charge **Q**, cette dernière subit une force électrostatique $\vec{F}$:

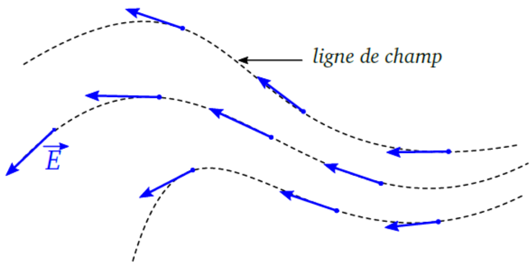
$$\vec{F} = K \cdot \frac{Q.q}{r^2} \cdot \vec{u} = Q.\vec{E}$$

où $\vec{E}$ est le champ électrostatique:

$$\vec{E} = K \cdot \frac{q}{r^2} \cdot \vec{u}$$



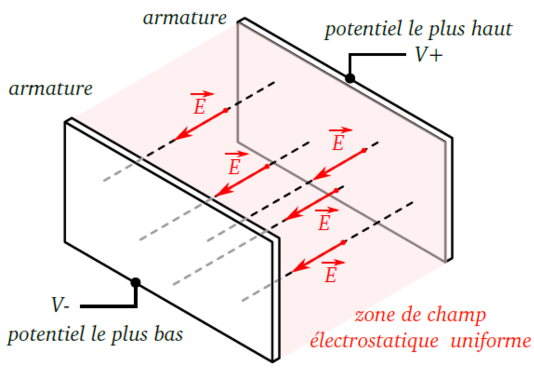

Le long d'une ligne de champ, le vecteur champ électrostatique mesuré en chaque point de la ligne est tangent à la ligne de champ.




On peut produire un champ électrostatique uniforme entre deux plaques d'un condensateur plan. Les vecteurs champs auront même sens, même direction et même intensité dans le volume compris entre les deux armatures. Les lignes de champ seront des droites parallèles entre elles, perpendiculaires aux armatures du condensateur.

Le champ électrique uniforme $\vec{E}$ est orienté de l'électrode à haut potentiel vers l'électrode à bas potentiel (couramment de la borne ⊕ vers la borne ⊖.)

On utilise un tel système pour modifier la vitesse de particules chargées ou les dévier. Cela est utilisé notamment dans un spectromètre de masse afin de réaliser des analyses chimiques d'échantillons de très petites tailles.




## 3- Analogies entre les interactions gravitationnelle et électrostatique

On observe différentes analogies entre les lois de Coulomb et de gravitation universelle:

- Ce sont des actions à distance, les corps n'ont pas besoin d'être en contact.
- L'intensité des forces est inversement proportionnellement au carré de la distance.
- La direction des forces d'interaction passe par le centre de chaque objet massif ou chargé.
- Les deux interactions peuvent être attractives, mais seule la force électrostatique peut être répulsive.

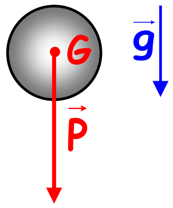
# 4- Chute verticale d'un solide

## 4.1- Force de pesanteur et champ de pesanteur terrestre

En première approximation, on peut dire que le poids d'un objet est égal à la force d'attraction gravitationnelle que la Terre exerce sur lui.

Cette force de pesanteur est représentée par un vecteur $\vec{P}$ possédant:

- Une origine: le centre d'inertie ***G*** du corps.
- Une direction: la verticale passant par ***G***.
- Un sens: du haut vers le bas.
- Une intensité: **P = m g**.




**Remarque:** *En réalité, le poids n'est pas rigoureusement confondu avec la force de gravitation.*

En un point donné M, au voisinage de la Terre, le poids $\vec{P}$ d'un objet de masse m peut s'écrire:

| $\vec{P}=m.\vec{g}$ | P: | Poids (N) |
|---|---|---|
| | m: | Masse (kg) |
| | g: | Intensité de la pesanteur ($N.kg^{-1}$) |

Le vecteur $\vec{g}$ est, par définition, le vecteur champ de pesanteur terrestre au point **M** considéré.

Ce vecteur champ de pesanteur terrestre $\vec{g}$ possède:

- Une origine: le point **M**.
- Une direction: la verticale passant par **M**.
- Un sens: du haut vers le bas.
- Une valeur: l'intensité **g** de la pesanteur au point **M**.

La valeur de l'intensité **g** de la pesanteur dépend de la latitude du point **M** où l'on opère et de son altitude:

**g = 9,78N/kg** à l'équateur, au niveau de la mer.
**g = 9,83N/kg** au pôle nord, au niveau de la mer.

La valeur de l'intensité **g** diminue avec l'altitude d'environ **1%** tous les **30km**.

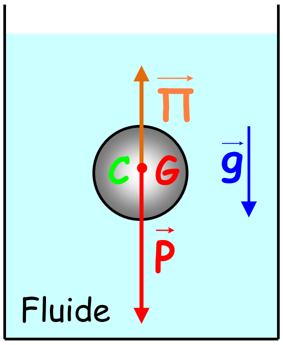
**Remarque:** Pour faciliter les calculs, on pourra prendre, en première approximation, une valeur de l'intensité de la pesanteur **g** de **10 N/kg**.

Dans un domaine restreint au voisinage de la Terre (dimensions de l'ordre de quelques kilomètres), on peut considérer que le champ de pesanteur est uniforme: le vecteur champ de pesanteur $\vec{g}$ a même direction, même sens et même valeur en tout point de ce domaine restreint.

### 4.2- Poussée d'Archimède

La surface d'un solide immergé dans un fluide (liquide, gaz) est constamment "frappée" par les molécules de ce fluide. Ces chocs sont à l'origine de la poussée d'Archimède.

La poussée d'Archimède est une force de contact répartie sur la surface de contact solide-fluide.




On la représente par un vecteur $\vec{\Pi}$ qui possède:

- Une origine: le centre d'inertie ***C*** du volume de fluide déplacé.
- Une direction: la verticale passant par ***C***.
- Un sens: du bas vers le haut.
- Une valeur égale au poids du fluide déplacé.

**La poussée d'Archimède $\vec{\Pi}$ exercée par un fluide de masse volumique $\rho_{fluide}$ s'écrit:**

$$\vec{\Pi} = -\rho_{fluide}.V.\vec{g}$$

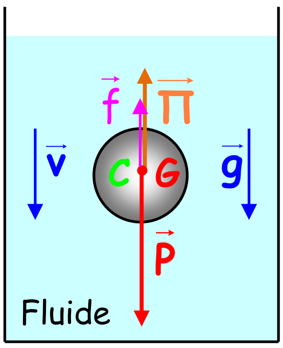
| | |
|---|---|
| $\Pi$: | **Poussée d'Archimède (N)** |
| $\rho_{fluide}$: | **masse volumique du fluide ($kg.m^{-3}$)** |
| $V$: | **Volume de fluide déplacé ($m^3$)** |
| $g$: | **Intensité de la pesanteur ($N.kg^{-1}$)** |

**Remarque:** Le centre d'inertie ***C*** du volume de fluide déplacé peut être différent du centre d'inertie ***G*** du solide. C'est le cas, notamment, si le solide n'est que partiellement immergé dans le fluide ou s'il n'est pas homogène. Par contre, dans le cas fréquent d'un solide homogène totalement immergé dans le fluide, le centre d'inertie ***C*** du volume de fluide déplacé est confondu avec le centre d'inertie ***G*** du solide.

### 4.3- Force de frottement fluide

Si un solide se déplace dans un fluide, il apparaît des forces de "frottement fluide" sur toute la surface du solide. Ces forces de frottement fluide peuvent être résistantes (chute d'une bille ralentie par la présence d'air ou d'eau) ou motrices (feuille emportée par le vent).

Dans le cas d'un solide homogène animé d'un mouvement de translation dans le fluide, on les modélise par un vecteur $\vec{f}$ de sens opposé au mouvement si les frottements sont résistants. Comme on étudie le mouvement du centre d'inertie ***G***, on reporte en ce point toutes les forces extérieures agissant sur le solide, notamment $\vec{f}$.




La valeur **f** de la force de frottement dépend de la nature du fluide, mais également de la vitesse **v** du solide en translation, de sa forme, de son état de surface.

Souvent, la valeur de la force de frottement sera modélisée par une expression de la forme: $\mathbf{f=k.v^n}$ où **n** est un entier à déterminer. Pour des vitesses faibles la force de frottement sera modélisée par une expression de la forme: $\mathbf{f=k.v}$; tandis que pour des vitesses plus importantes elle sera modélisée par une expression de la forme: $\mathbf{f=k.v^2}$.

C'est l'expression qui donne la meilleure adéquation entre les prévisions théoriques et les résultats expérimentaux qui, bien évidemment, doit être retenue.

### 4.4- Chute verticale libre

#### a- Définition

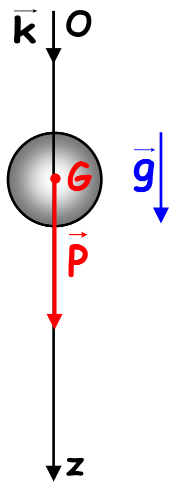
Un solide est en chute libre s'il n'est soumis qu'à son poids $\vec{P}$.

C'est ce qui se passe si on supprime l'air dans une enceinte pour y étudier la chute d'un solide dans le vide (au voisinage de sol de la Lune, sans atmosphère, toutes les chutes sont libres).

**Remarque:** La chute est quasi libre si on étudie, dans l'air, la chute d'une bille de masse volumique grande par rapport à la masse volumique de l'air (la poussée d'Archimède est alors négligeable par rapport au poids) sur une hauteur de quelques mètres (les forces de frottement sont, à faible vitesse, également négligeables par rapport au poids).

#### b- Chute verticale libre, sans vitesse initiale

On considère une petite bille en plomb de masse m est lâchée, sans vitesse initiale, à partir de l'origine d'un axe vertical **(O; $\vec{k}$)** orienté vers le bas. Après un parcours de **2,0m**, la bille frappe le sol.




La bille étant en plomb, la valeur de son poids **P** est très grande par rapport à la valeur de la poussée d'Archimède $\Pi$ dans l'air. On peut donc négliger la poussée d'Archimède.

De plus, la bille est petite, de forme sphérique, sa vitesse restera faible (hauteur de chute petite). Dans ces conditions, la force de frottement fluide exercée par l'air sur la surface de la bille est également négligeable par rapport au poids.

La seule force agissant sur la bille est donc le poids $\vec{P}$. La chute est dite libre.

On peut établir l'équation différentielle du mouvement et chercher sa solution analytique.

Le référentiel Galiléen choisi est la Terre auquel est associé le repère **(O; $\vec{k}$)**.

La seule force qui s'exerce sur la bille est son poids:

$$\vec{P} = m.\vec{g}.$$

Le référentiel Terrestre étant Galiléen, on applique la seconde loi de Newton à la bille:

$$\vec{P} = m.\vec{g} = m.\vec{a_G}$$

On en déduit la relation:

$$\vec{g} = \vec{a_G}$$

Par projection sur l'axe Oz on aura:

$$g = a_G$$

De plus, on sait que:

$$a_G = \frac{dv}{dt}$$

D'où l'équation différentielle relative à la vitesse de la bille:

$$\frac{dv}{dt} = g$$

On cherche la fonction **v(t)** qui est solution de cette équation différentielle du premier ordre, c'est à dire la fonction **v(t)** qui admet **g** comme dérivée.

On aura pour **v(t)**:

$$v(t) = g\ t + Cte$$

A l'instant initial la vitesse de la bille est nulle, donc:

$$v(0) = Cte = 0$$

D'où l'expression de la vitesse **v(t)**:

$$v(t) = g\ t$$

On cherche de nouveau la primitive de **v(t)**, c'est à dire La fonction **z(t)** qui admet **g t** comme dérivée.

On aura pour **z(t)**:

$$z(t) = \frac{1}{2}.g.t^2 + Cte$$

A l'instant initial on a:

$$z(0) = Cte = 0$$

D'où l'expression de **z(t)**:

$$z(t) = \frac{1}{2}.g.t^2$$

Les équations horaires du mouvement sont donc:

$$z(t) = \frac{1}{2}.g.t^2 \qquad v(t) = g.t \qquad a = g$$

On dit que la bille est animée d'un mouvement rectiligne uniformément accéléré (le vecteur accélération ne change pas).

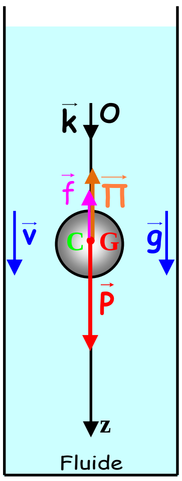
La bille frappe le sol au point **S** à l'instant $t_S$ tel que:

$$t_S = \sqrt{\frac{2.z}{g}} = \sqrt{\frac{2\times 2,0}{9,8}} = 0,64s$$

La vitesse $V_S$ de la bille en ce point **S** est:

$$V_S = g.t_S = g.\sqrt{\frac{2.z_S}{g}} = \sqrt{2.g.z_S} = \sqrt{2\times 9,8\times 2,0} = 6,3m.s^{-1}$$

### 4.5- Chute verticale d'une bille soumise à une force de frottement




La valeur **f** de la force de frottement dépend de la nature du fluide, mais elle dépend également de la vitesse **v** du solide en translation, de sa forme, de son état de surface.

On considère une bille en verre de masse volumique $\rho_{bille}$=2600kg.m$^{-3}$, et de rayon **r=1mm**.

Cette bille est lâchée, sans vitesse initiale, à la surface d'un tube vertical contenant de l'huile de masse volumique $\rho_{huile}$=970kg.m$^{-3}$ dont on veut calculer le coefficient de viscosité $\eta$, sachant que la vitesse limite de la bille est $\mathbf{V_{lim}=0{,}71mm.s^{-1}}$.

Le volume **V** de la bille est donné par la relation:

$$V = \frac{4}{3}.\pi.r^3$$

La masse **m** de la bille est:

$$m = \rho_{bille}.V = \frac{4}{3}.\pi.\rho_{bille}.r^3$$

La valeur du poids **P** de la bille est donné par la relation:

$$P = m\ .g = \frac{4}{3}.\pi.\rho_{bille}.g.r^3$$

La valeur $\Pi$ de la poussée d'Archimède exercée par le liquide sur la bille est égale au poids du liquide déplacé par la bille:

$$\Pi = m_{huile}\ .g = \frac{4}{3}.\pi.\rho_{huile}.g.r^3$$

Si on note $\eta$ le coefficient de viscosité de l'huile, l'intensité **f** de la force de frottement fluide $\vec{f}$, opposée à la vitesse **v**, peut s'écrire en utilisant la relation de Stokes (valable lorsque la vitesse reste faible):

$$f = 6.\pi.\eta.r.v$$

Les forces extérieures exercées sur la bille étant le poids $\vec{P}$, la poussée d'Archimède $\vec{\Pi}$ et la force de frottement fluide $\vec{f}$, la seconde loi de Newton permet d'écrire la relation:

$$\vec{P} + \vec{\Pi} + \vec{f} = m.\vec{a_G}$$

C'est à dire:

$$P.\vec{k} - \Pi.\vec{k} - f.\vec{k} = m.a_G.\vec{k}$$

Par projection sur l'axe **Oz**, on aura:

$$P - \Pi - f = m.a_G$$

En remplaçant les valeurs des forces par leur expression, on aura:

$$\frac{4}{3}.\pi.\rho_{bille}.g.r^3 - \frac{4}{3}.\pi.\rho_{huile}.g.r^3 - 6.\pi.\eta.r.v = \frac{4}{3}.\pi.\rho_{bille}.r^3.a_G$$

De plus, on sait que:

$$a_G = \frac{dv}{dt}$$

D'où l'équation différentielle relative à la vitesse de la bille:

$$\frac{dv}{dt} + \frac{9.\eta}{2.\rho_{bille}.r^2}.v = g.\left(1 - \frac{\rho_{huile}}{r_{bille}}\right)$$

Cette équation différentielle s'écrit sous la forme simplifiée:

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = C$$

Avec:

$$\tau = \frac{2.\rho_{bille}.r^2}{9.\eta} \quad \text{et} \quad C = g\left(1 - \frac{\rho_{huile}}{\rho_{bille}}\right)$$

**Remarque:** La constante $\tau$ est appelée constante de temps du montage.

A l'instant initial, la vitesse de la bille étant nulle, son accélération est donc:

$$a_0 = \left(\frac{dv}{dt}\right)_{t=0} = C = g\left(1 - \frac{\rho_{huile}}{\rho_{bille}}\right)$$

Initialement nulle, la force de frottement $\vec{f}$ augmente proportionnellement à la vitesse jusqu'à atteindre à un instant **t** une valeur limite $\overrightarrow{f_{lim}}$. Le poids $\vec{P}$ est alors compensé par la somme des deux forces résistantes $\vec{\Pi} + \vec{f}$. La somme des forces est alors nulle et, d'après la deuxième loi de Newton on aura:

$$\vec{P} + \vec{\Pi} + \vec{f} = m.\overrightarrow{a_{lim}} = \vec{0}$$

A cet instant on aura donc:

$$a_{lim} = \left(\frac{dv}{dt}\right) = 0$$

L'équation différentielle précédente s'écrira alors:

$$\left(\frac{dv}{dt}\right)_{lim} + \frac{V_{lim}}{\tau} = C$$

La vitesse limite $V_{lim}$ atteinte par la bille est donc:

$$V_{lim} = C.\tau = g\left(1-\frac{\rho_{huile}}{\rho_{bille}}\right).\frac{2.\rho_{bille}.r^2}{9.\eta} = \frac{2.g.r^2.\left(\rho_{bille}-\rho_{huile}\right)}{9.\eta}$$

De cette relation on en déduit l'expression donnant le coefficient de viscosité $\eta$:

$$\eta = \frac{2.g.r^2.\left(\rho_{bille}-\rho_{huile}\right)}{9.V_{lim}}$$

$$\eta = \frac{2\times 9,8\times\left(1,0.10^{-3}\right)^2\times(2600-970)}{9\times 0,71.10^{-3}} = 5,0 kg.m^{-1}.s^{-1} = 5,0\ Pa.s$$

L'unité de la viscosité étant en Pascal.Seconde (**Pa.s**) ou Poiseuille (**Pl**):

$$1 Pa.s = 1 Pl = 1\ kg.m^{-1}.s^{-1}$$

# 5- Mouvement d'un projectile dans le champ de pesanteur

## 5.1- Généralités

On appelle projectile tout corps lancé au voisinage de la Terre avec une vitesse initiale $\overrightarrow{V_0}$ faisant un angle $\alpha$ avec l'horizontale.

En mécanique le mouvement d'un corps dépend de l'accélération (donc des forces) et des conditions initiales (vitesse et position).

## 5.2- Définition du système

Le système étudié est le projectile dans le référentiel terrestre supposé galiléen. On y associe le repère cartésien **(O; $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$)**.

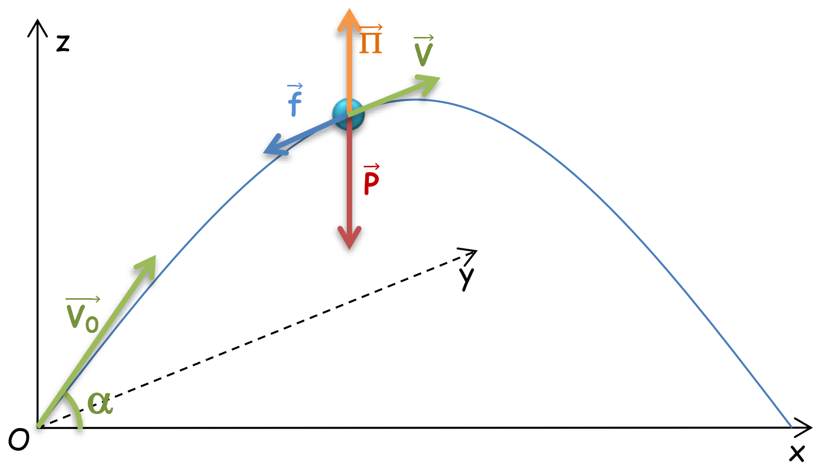
## 5.3- Bilan des forces extérieures

Le projectile **M** (système) se déplaçant dans le référentiel Terrestre peut être soumis à diverses forces (poids $\vec{P}$, poussée d'Archimède $\vec{\Pi}$, forces de frottement fluides $\vec{f}$, etc.).

Toutefois, on ne tiendra compte ni de la poussée d'Archimède $\vec{\Pi}$, ni de la force de frottement fluide $\vec{f}$ exercée sur le projectile.

On assimilera le projectile à un point matériel **M**.

La seule force qui agit est le poids $\vec{P} = m.\vec{g}$ du corps: le solide est en "chute libre".




### 5.4- Utilisation de la seconde loi de Newton

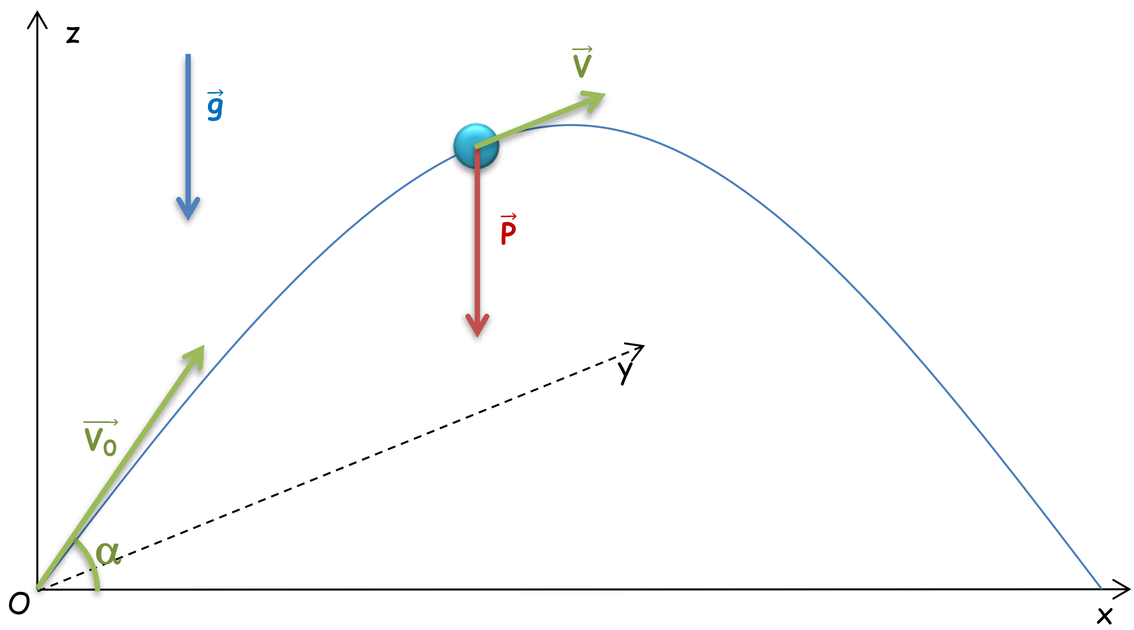
On applique la seconde loi de Newton dans le référentiel terrestre où l'application du théorème du centre d'inertie donne:

$$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = \vec{P} = m.\vec{g} = m.\vec{a}$$

C'est-à-dire avec:

$$\vec{a} = \vec{g}$$

Etant donné que le mouvement se fait dans une petite région l'accélération est constante, et ne dépend ni de la masse de l'objet, ni de la manière dont il a été lancé: on dira que le champ de pesanteur $\vec{g}$ est invariant.



### 5.5- Conditions initiales

Le projectile est lancé depuis le point **O**, choisi comme origine. Le plan d'étude choisi est le plan (xOz) contenant le vecteur vitesse initiale $\overrightarrow{V_0}$ et le vecteur champ de pesanteur $\vec{g}$.

$$\overrightarrow{OM}\begin{vmatrix} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \\ z_0 = 0 \end{vmatrix} \qquad \overrightarrow{V_0}\begin{vmatrix} V_{x0} = V_0.\cos\alpha \\ V_{y0} = 0 \\ V_{z0} = V_0.\sin\alpha \end{vmatrix} \qquad \vec{a} = -g.\vec{k}\begin{vmatrix} a_x = 0 \\ a_y = 0 \\ a_z = -g \end{vmatrix}$$

### 5.6- Les équations du mouvement

Le mouvement s'effectuant dans le plan (**xOz**), les composantes des vecteurs suivant l'axe **Oy** seront toujours nulles.

#### a- Equation horaire du vecteur vitesse

L'accélération $\vec{a}$ étant la dérivée de la vitesse $\vec{v}$, on en déduit le vecteur vitesse $\vec{v}$ en recherchant la primitive de l'accélération:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a} \qquad \Leftrightarrow \qquad \vec{v} = \int \vec{a}.dt$$

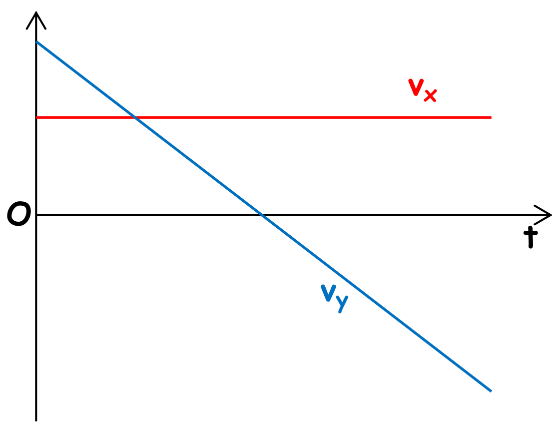
Soit en passant par les composantes:

$$\vec{a}\begin{vmatrix} \dfrac{dv_x}{dt} = 0 \\ \dfrac{dv_y}{dt} = 0 \\ \dfrac{dv_z}{dt} = -g \end{vmatrix} \qquad \Leftrightarrow \qquad \vec{v}\begin{vmatrix} v_x = V_0.\cos\alpha \\ v_y = 0 \\ v_z = -g.t + V_0.\sin\alpha \end{vmatrix}$$

Les constantes d'intégration dépendant des conditions initiales.

On constate que la composante $v_x$ de la vitesse $\vec{v}$ est indépendante du temps, tandis que la composante $v_z$ est une fonction affine du temps.

D'où le graphique ci-contre représentant l'évolution temporelle des composantes du vecteur vitesse $\vec{v}$.




#### b- Equation horaire du vecteur position

La vitesse $\vec{v}$ étant la dérivée de la position $\overrightarrow{OM}$, on en déduit le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ en recherchant la primitive de la vitesse:

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \vec{v} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{OM} = \int \vec{v}.dt$$

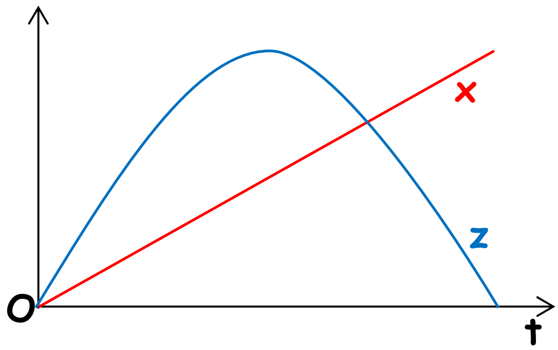
Soit en passant par les composantes:

$$\vec{v} \left| \begin{array}{l} v_x = \dfrac{dx}{dt} = V_0.\cos\alpha \\ v_y = \dfrac{dx}{dt} = 0 \\ v_z = \dfrac{dx}{dt} = -g.t + V_0.\sin\alpha \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{OM} \left| \begin{array}{l} x = V_0.\cos\alpha.t \\ y = 0 \\ z = -\dfrac{1}{2}.g.t^2 + V_0.\sin\alpha.t \end{array} \right.$$

Les constantes d'intégration dépendant des conditions initiales.

On constate que la composante **x** de la position $\overrightarrow{OM}$ est une fonction linéaire du temps, tandis que la composante **z** est une fonction parabolique du temps.

D'où le graphique ci-contre représentant l'évolution temporelle des composantes du vecteur position $\overrightarrow{OM}$.




## c- Equation de la trajectoire du projectile

L'équation de la trajectoire est une fonction de la forme **z = f(x)**, puisque le mouvement a lieu dans le plan (**xOz**).

Il est nécessaire d'éliminer le paramètre t, en utilisant l'équation horaire x(t) établie précédemment:

$$x = V_0.\cos\alpha.t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{x}{V_0.\cos\alpha}$$

En injectant cette expression dans la seconde équation horaire, il vient:

$$z = -\frac{1}{2}.g.t^2 + V_0.\sin\alpha.t \quad \Rightarrow \quad z(x) = -\frac{g}{2.V_0^2.\cos^2\alpha}.x^2 + \tan\alpha.x$$

Cette équation est celle d'une fonction parabolique.

### d- Expression de la flèche

La flèche correspond à l'altitude maximale atteinte (**$z_S$ = H**). Cette altitude correspond au sommet S de la trajectoire.

Pour déterminer la valeur de la flèche **$z_S$**, on peut remarquer qu'en ce point S:

- La composante verticale de la vitesse est nulle: **$v_{zS} = 0$**.
- La tangente à la courbe est horizontale, donc: $\left(\frac{dz}{dx}\right)_S = 0$.

**Remarque:** Au point S la vitesse $\vec{v_S}$ du projectile n'est pas nulle, seule sa composante verticale **$v_{zs}$** est nulle.

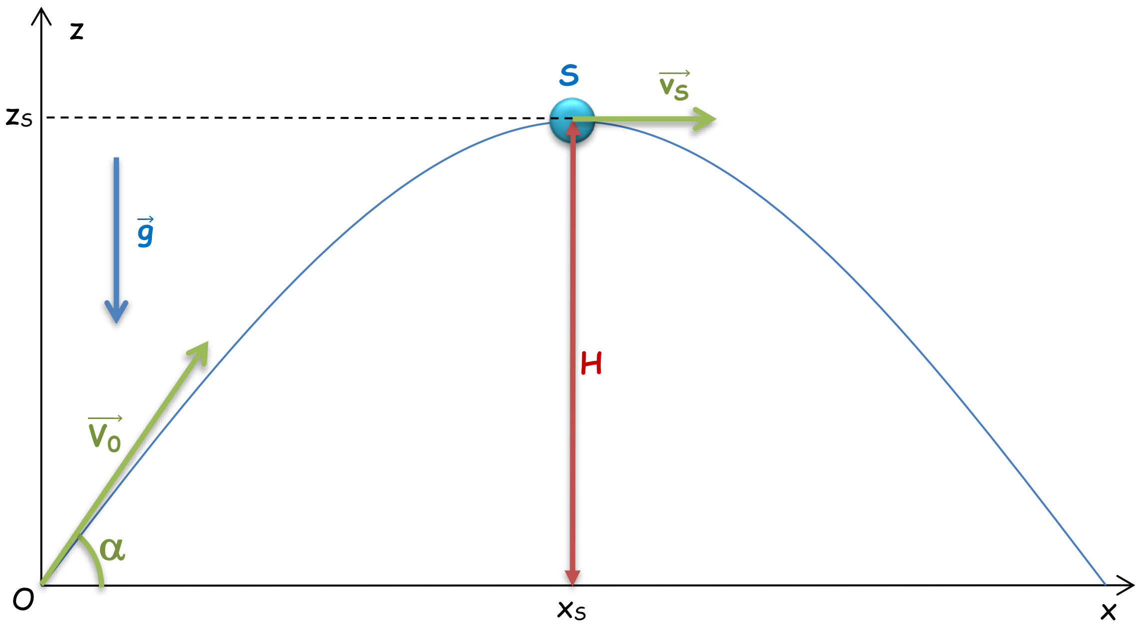
**Première méthode:** basée sur le raisonnement physique, elle est la plus rapide et sera donc privilégiée.

La composante verticale **$v_{zs}$** de la vitesse étant nulle, on aura:

$$v_{zs} = -g.t_S + V_0.\sin\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad t_S = \frac{V_0.\sin\alpha}{g}$$

En injectant cette expression dans la seconde équation horaire, il vient:

$$z_S = -\frac{1}{2}.g.t^2 + V_0.\sin\alpha.t_S \quad \Rightarrow \quad H = z_S = -\frac{V_0^2.\sin^2\alpha}{2.g}$$



**Seconde méthode:** basée sur le raisonnement mathématique, elle est plus longue et fait appel au fait qu'une courbe a sa dérivée qui s'annule en ses extrémum.
On commence par déterminer l'abscisse $x_s$ de la flèche.

La dérivée de l'équation de la trajectoire du projectile au point **S** est nulle, donc:

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)_S = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dx}\left(-\frac{g}{2.V_0^2.\cos^2\alpha}.x^2 + \tan\alpha.x\right)_S = 0$$

C'est à dire:

$$-\frac{2.g}{2.V_0^2.\cos^2\alpha}.x_S + \tan\alpha = 0$$

On aura ainsi pour l'abscisse $x_s$ de la flèche:

$$x_S = \frac{V_0^2.\sin\alpha.\cos\alpha}{g}$$

Ainsi la flèche $z_S = H$ de la trajectoire est obtenue en remplaçant l'abscisse $x_S$ par sa valeur dans l'expression de l'équation de la trajectoire:

$$z_S = -\frac{g}{2.V_0^2.\cos^2\alpha}.\left(\frac{V_0^2.\sin\alpha.\cos\alpha}{g}\right)^2 + \tan\alpha.\frac{V_0^2.\sin\alpha.\cos\alpha}{g}$$

Soit après simplification:

$$H = z_S = -\frac{V_0^2.\sin^2\alpha}{2.g}$$

### e- Expression de la portée

La portée correspond à la distance maximale atteinte ($x_A = D$). Cette distance correspond au point A de la trajectoire pour laquelle la composante $z_A$ a une valeur nulle. On aura ainsi:

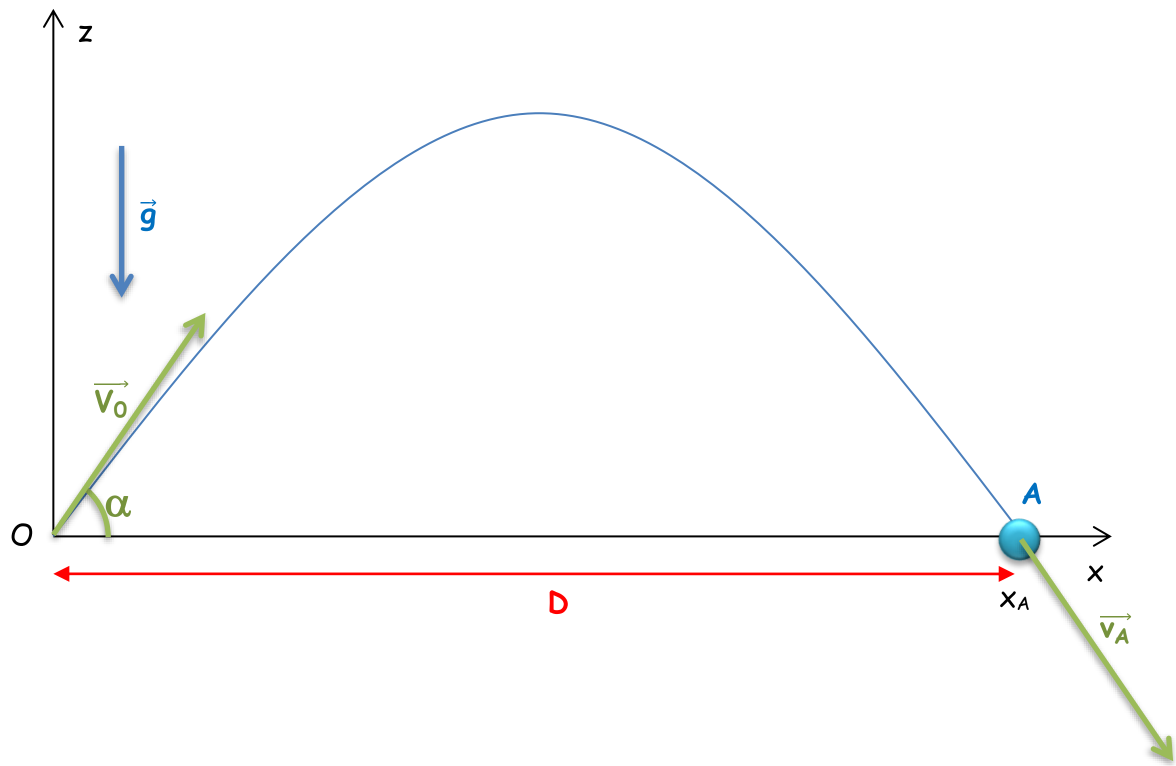
$$z_A = -\frac{g}{2.V_0^2.\cos^2\alpha}.x_A^2 + \tan\alpha.x_A = 0$$

La solution $x_A = 0$ correspondant au point d'origine, on en déduit la valeur de $x_A$:

$$x_A = \frac{2.V_0^2.\cos\alpha.\sin\alpha}{g}$$

Comme **2.cosα.sinα = sin2α**, l'expression donnant la valeur **D** de la portée est:

$$D = \frac{V_0^2 . \sin 2\alpha}{g}$$




**Remarque:** La valeur $V_A$ de la vitesse de l'objet en **A** est la même que celle de la vitesse à l'instant initial ($V_A=V_0$). Seul l'angle avec l'horizontal est changé (**-α**).

### f- Influence des paramètres initiaux sur la flèche et la portée

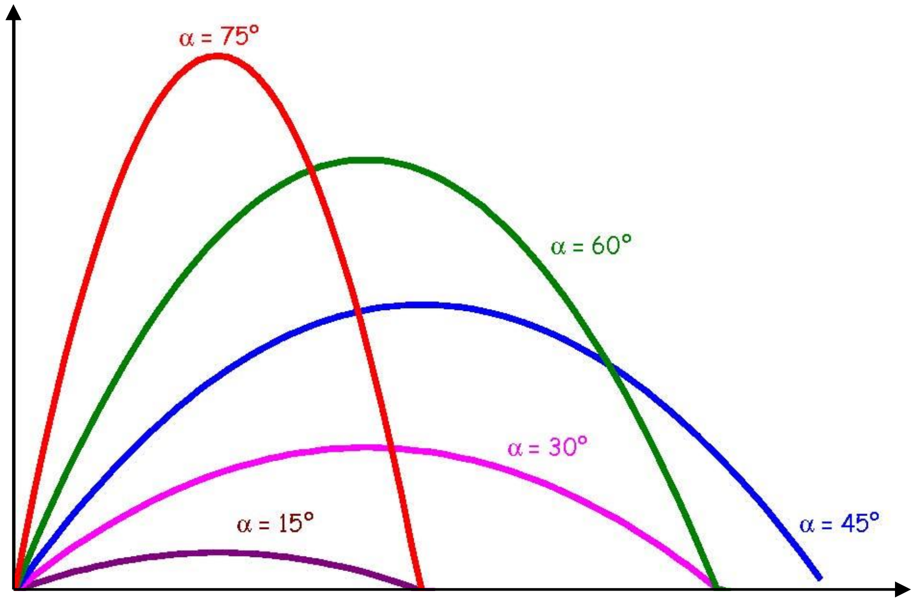
On constate que les valeurs de la flèche **H** et de la portée **D** sont proportionnelles à $V_0^2$.

Pour une valeur donnée de l'angle α; plus la valeur $V_0$ de la vitesse initiale est grande, plus le projectile s'élève et parcourt une distance importante.

Pour une valeur donnée de la vitesse $V_0$, on constate que:

- Lorsque l'angle α croit de **0°** à **45°**, la flèche **H** et la portée **D** augmentent.
- Pour **α=45°**, la portée **D** est maximale (**sin2α=1**). C'est cette valeur que les lanceurs de poids, de marteau ou de javelot, recherchent pour donner à leurs jets une efficacité optimale.
- Lorsque l'angle α croit de **45°** à **90°**, la flèche **H** continue à augmenter, alors que la portée **D** diminue.
- La flèche est maximale et la portée est nulle pour **α=90°**: on retrouve alors le cas particulier de la chute libre verticale.

Pour $V_0$ donné, deux projectiles lancés respectivement avec les angles de tir $\alpha_1$ et $\alpha_2$ complémentaires ont la même portée, mais des flèches différentes.




**Remarque:** On peut retrouver l'angle pour lequel on obtient la portée maximale en étudiant la relation:

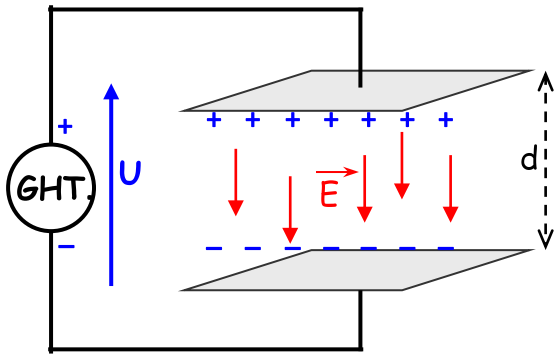
$$D = \frac{V_0^2 . \sin 2\alpha}{g}$$

On constate que **D** est maximum si on a $\sin 2\alpha = 1$, c'est-à-dire $\alpha = 45°$.

# 6- Mouvement d'une particule chargée dans un champ électrique

## 6.1- Champ électrostatique uniforme

Deux plaques métalliques planes et parallèles reliées à un générateur haute tension créent dans l'espace situé entre elles un champ électrostatique uniforme $\vec{E}$.

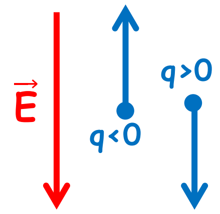



**U**(**V**) est la tension électrique délivrée par le générateur et **d**(**m**) est la distance orthogonale entre les deux plaques.

Les caractéristiques du champ électrostatique sont:

- Direction: orthogonale aux deux plaques.
- Sens: De l'électrode positive vers l'électrode négative.
- Valeur: $E = \frac{U}{d}$ (V/m).

Une particule chargée portant une charge électrique **q** (**C**) et placée dans un champ électrique $\vec{E}$ subit une force électrique $\vec{F}$:

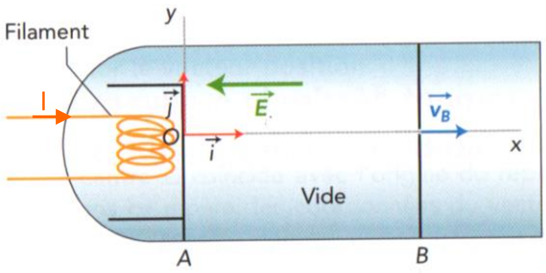



$$\vec{F} = q.\vec{E}$$

Le sens de la force électrique dépend du signe de la charge **q** et du sens de $\vec{E}$.

## 6.2- Application au canon à électrons

Un filament porté à haute température par le passage d'un courant électrique **I** émet des électrons dont on peut négliger la vitesse initiale.




Ces électrons sont ensuite accélérés à l'intérieur d'un condensateur plan dont les armatures **A** et **B** sont verticales et percées d'un trou afin de laisser passer les électrons.

On donne $\mathbf{e = 1,6.10^{-19}C}$ et $\mathbf{m_{e^-} = 9,1.10^{-31}kg}$.

La tension entre les plaques distantes de $\mathbf{d = AB = 1,0cm}$ est $\mathbf{U_{BA} = 600V}$.

On pourra néglige le poids des électrons devant la force électrostatique qu'ils subissent.

L'expression vectorielle du poids $\vec{P_e}$ de l'électron étant $\vec{P_e} = m_e.\vec{g}$, sa valeur sera donc:

$$P_e = m_e.g = 9,11.10^{-31}\times 9,81 = 8,94.10^{-30}N$$

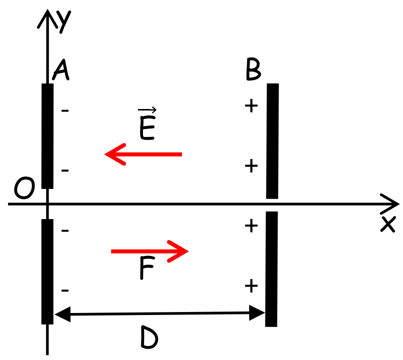
L'expression vectorielle de la force électrique $\vec{F}$ à laquelle est soumis l'électron est:

$$\vec{F} = q.\vec{E} = -e.\vec{E}$$

La valeur **F** de la force $\vec{F}$, opposée au champ électrique $\vec{E}$, entre les plaques **A** et **B** du tube à électrons sera alors:

$$F = e.E = e.\frac{U_2}{D_2} = 1,60.10^{-19}\times\frac{600}{6,0.10^{-2}} = 1,6.10^{-15}N$$

On aura ainsi $\mathbf{F >> P_e}$ ($\mathbf{F \approx 10^{14}\times P}$). Donc, on pourra donc négliger le poids et la seule force à l'origine de la déviation du faisceau d'électrons entre les plaques **A** et **B** sera la force électrique $\vec{F}$ de valeur **F**.




Le canon à électron permet d'accélérer et focaliser les électrons émis par le filament chauffé, afin d'obtenir un faisceau rectiligne d'électrons homocinétiques de vitesse $V_0$.

Le schéma légendé du canon à électron est représenté ci-contre.

Le référentiel étant supposé Galiléen on pourra appliquer la seconde loi de Newton:

$$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = \vec{F} = q.\vec{E} = -e.\vec{E} = m_e.\vec{a}$$

Par projection sur l'axe **Ox** on aura:

$$e.E = m_e.a_x$$

D'où:

$$a_x = \frac{e}{m_e}.E$$

L'accélération dérivant de la vitesse on aura:

$$V_x = \frac{e}{m_e}.E.t + Cte$$

A t=0 la vitesse étant nulle on en déduit que la cte est nulle, d'où l'expression de la vitesse $\mathbf{V_x}$:

$$V_x = \frac{e}{m_e}.E.t$$

La vitesse dérivant de la position on aura:

$$x = \frac{1}{2}.\frac{e}{m_e}.E.t^2 + cte$$

A **t=0** l'électron se trouve en **x=0**, on en déduit que la cte est nulle, d'où l'expression de la position **x**:

$$x = \frac{1}{2}.\frac{e}{m_e}.E.t^2$$

La relation précédente nous donne pour le temps:

$$t = \sqrt{\frac{2.m_e}{e.E}.x}$$

En remplaçant le temps par cette expression dans la relation donnant la vitesse on aura:

$$V_x = \sqrt{\frac{2.e.E}{m_e}.x}$$

En tenant compte que $\mathbf{E} = \frac{U}{D}$, nous aurons lorsque l'électron parvient à la plaque **B** (**x=D**) la vitesse:

$$V_B = \sqrt{\frac{2.e.U}{m_e}} = \sqrt{\frac{2\times 1,60.10^{-19}\times 600}{9,11.10^{31}}} = 1,45.10^{7} m/s$$

L'énergie cinétique $E_c$ de cet électron est:

$$E_c = \frac{1}{2}.m_e.V_B^2 = \frac{1}{2}\times 9,11.10^{-31}\times(1,45.10^{7})^2 = 9,60.10^{-17} J = 600eV$$

On peut retrouver ce résultat en **eV** autrement sans calcul. En effet, on a:

$$E_c = \frac{1}{2}.m_e.V_B^2 = \frac{1}{2}.m_e.\frac{2.e.U}{m_e} = e.U \quad \text{soit en eV} \quad E_c = \frac{e.U}{e} = U = 600eV$$

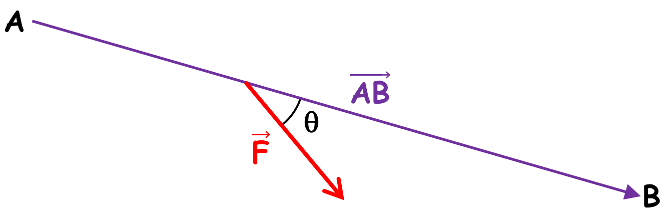
# 7- Travail d'une force

## 7.1- Travail d'une force constante

On considère une force $\vec{F}$ constante dont le point d'application se déplace d'un point ***A*** à un point **B**. Le travail $\mathbf{W_{AB}}$ de la force $\vec{F}$ lors de ce déplacement s'exprime par le produit scalaire des vecteurs $\vec{F}$ et $\overrightarrow{AB}$:

$$W_{AB}(\vec{F}) = \vec{F}.\overrightarrow{AB} = F\times AB\times\cos(\vec{F},\overrightarrow{AB})$$

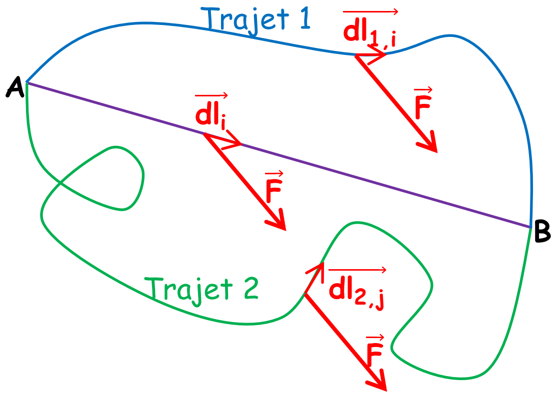
- $\mathbf{W_{AB}}$: Travail de la force (J)
- **F**: Valeur de la force (N)
- **AB**: Longueur du déplacement (m)
- $(\vec{F},\overrightarrow{AB})$: Angle orienté (rad)




$$W_{AB}(\vec{F}) = \vec{F}.\overrightarrow{AB} = F\times AB\times\cos(\theta)$$

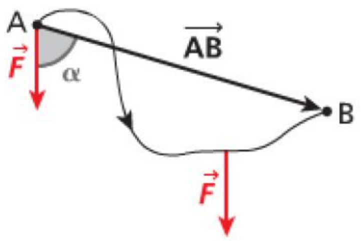
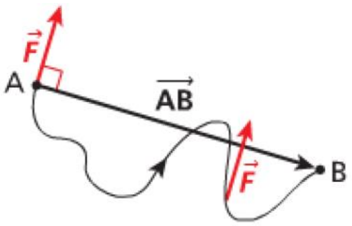
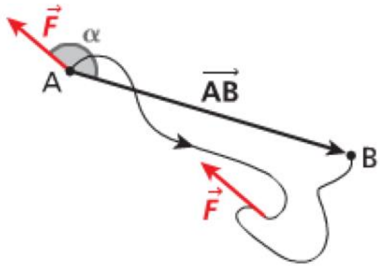
Le travail d'une force constante est indépendant du chemin suivi pour aller d'un point à un autre.

On le démontre en décomposant le trajet considéré en éléments vectoriels infinitésimaux:




$$W_{AB}\left(\vec{F}\right) = \sum_i \vec{F}.\overrightarrow{dl_{1,i}} = \sum_j \vec{F}.\overrightarrow{dl_{1,j}} = \sum_i \vec{F}.\overrightarrow{dl_i} = \vec{F}.\overrightarrow{AB}$$

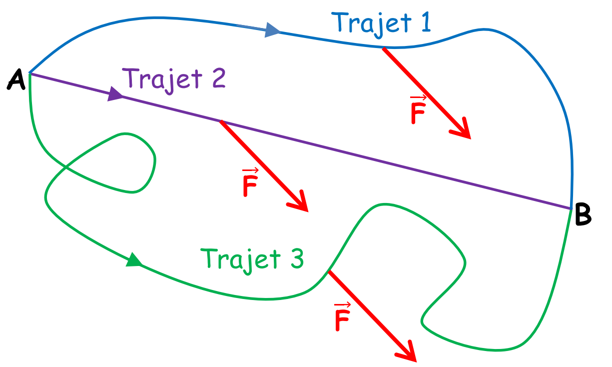
Le travail est une grandeur algébrique (positive ou négative), c'est là tout l'intérêt de l'utilisation du produit scalaire.

| $W_{AB}\left(\vec{F}\right) > 0$ | $W_{AB}\left(\vec{F}\right) = 0$ | $W_{AB}\left(\vec{F}\right) < 0$ |
|---|---|---|
| $0 \leq (\vec{F},\overrightarrow{AB}) < \frac{\pi}{2}$ | $(\vec{F},\overrightarrow{AB}) = \frac{\pi}{2}$ | $\frac{\pi}{2} \leq (\vec{F},\overrightarrow{AB}) < \pi$ |
| La force favorise le déplacement | La force n'a pas d'effet sur le déplacement | La force gêne le déplacement |
| Le travail est moteur | Le travail est nul | Le travail est résistant |
| Cas du poids lors d'une descente | Cas du poids lors d'un déplacement horizontal | Cas du poids lors d'une montée |
|  |  |  |

## 7.2- Forces conservatives et non conservatives

Une force est dite conservative si son travail entre deux points **A** et **B** quelconques ne dépend pas de la trajectoire.

Toutes les forces constantes sont conservatives: le poids (dans un champ de pesanteur uniforme), la force électrique (dans un champ électrostatique uniforme), mais aussi d'autres forces non constantes (force de rappel élastique d'un ressort).

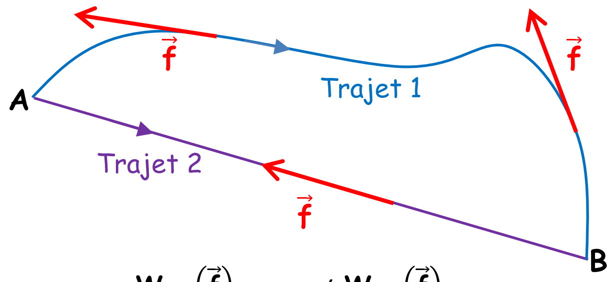



$$W_{AB}\left(\vec{F}\right)_{Trajet\ 1} = W_{AB}\left(\vec{F}\right)_{Trajet\ 2} = W_{AB}\left(\vec{F}\right)_{Trajet\ 3}$$

***Remarque:*** *Dans le cas d'une trajectoire fermée le travail d'une force conservative est nulle.*

Le travail d'une force non conservative entre deux points **A** et **B** quelconques dépend de la nature de la trajectoire suivie entre ces deux points.

Les forces de frottements ou la force de tension d'un fil sont des forces non-conservatives.

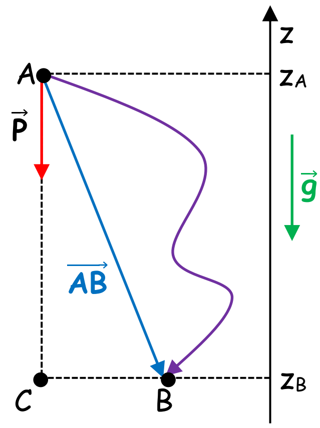



$$W_{AB}\left(\vec{f}\right)_{\text{Trajet 1}} \neq W_{AB}\left(\vec{f}\right)_{\text{Trajet 2}}$$

### 7.3- Le travail du poids dans un champ de pesanteur constant

Tant que le déplacement du système étudié est localisé et se fait à proximité de la surface de la Terre, le champ de pesanteur $\vec{g}$ est considéré comme constant. Le poids $\vec{P}=m.\vec{g}$ est donc une force constante.

Le travail du poids d'un solide de masse **m** dont le centre d'inertie **G** se déplace d'un point **A** à un point **B** a pour expression:




$$W_{AB}\left(\vec{P}\right) = \vec{P}.\overrightarrow{AB} = m\ \vec{g}.\overrightarrow{AB}$$

Dans le repère $(O;\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k})$, associé au référentiel terrestre, on a:

$$\vec{g}\begin{cases}0\\0\\-g\end{cases} \qquad \overrightarrow{AB}\begin{cases}x_B-x_A\\y_B-y_A\\z_B-z_A\end{cases}$$

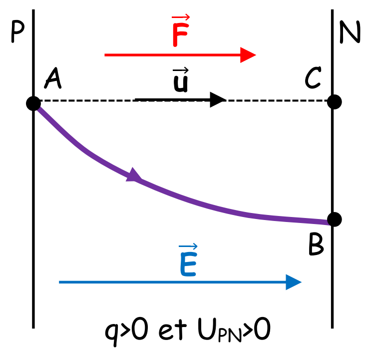
On aura ainsi pour le travail du poids:

$$W_{AB}\left(\vec{P}\right) = -\ m\ g\ (z_B-z_A) = m\ g\ (z_A-z_B) = m\ g\ h$$

Le travail du poids d'un objet de masse **m** ne dépend que de la hauteur **h** de chute.

### 7.4- Travail de la force électrique dans un champ constant

Entre deux plaques **P** et **N** d'un condensateur plan règne un champ électrostatique uniforme $\vec{E}$ perpendiculaire aux plaques. Une particule de charge **q** en mouvement entre les deux plaques est soumise à la force électrique $\vec{F}=q.\vec{E}$.




Entre deux points **A** et **B**, la force électrique est constante, donc conservative et son travail sur le trajet **AB** ne dépend pas du chemin suivi. Il peut donc être calculé en passant par le point **C**:

$$W_{AB}\left(\vec{F}\right) = \vec{F}.\overrightarrow{AB} = \vec{F}.\overrightarrow{AC} + \vec{F}.\overrightarrow{CB}$$

Or $\vec{F}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont parallèles et $\vec{F}$ et $\overrightarrow{CB}$ sont perpendiculaires donc: $\vec{F}.\overrightarrow{AB} = F.AB$ et $\vec{F}.\overrightarrow{CB} = \vec{0}$

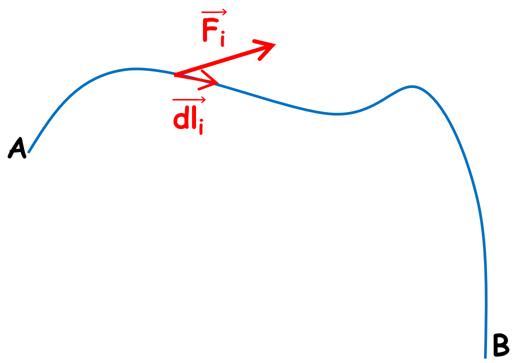
De plus, comme $U_{AC} = E.AC = E.PN = U_{PN}$, nous aurons ainsi:

$$W_{AB}\left(\vec{F}\right) = \vec{F}.\overrightarrow{AC} = q.E.AC = q.U_{PN}$$

### 7.5- Travail d'une force non constante

La plupart des forces ne sont pas constantes. C'est le cas par exemple de la force de gravitation qui s'exerce sur un satellite terrestre, de la tension du fil d'un pendule ou encore de la force de rappel d'un ressort.

On considère une force $\vec{F}$ dont la valeur, la direction ou le sens changent lorsque son point d'application se déplace entre les points **A** et **B**.




On appelle déplacement élémentaire $\vec{dl}$ un vecteur:

- Tangent à la trajectoire du point d'application.
- Infiniment petit.
- De même sens que le déplacement du point d'application.

Une force quelconque peut toujours être considérée comme constante sur un déplacement élémentaire.

Le travail élémentaire, noté $\delta W$, d'une force $\vec{F}$ durant un déplacement élémentaire $\vec{dl}$ a pour expression:

$$\delta W = \vec{F}.\vec{dl}$$

Lorsqu'une force $\vec{F}$ s'exerce le long d'un déplacement $\overrightarrow{AB}$, on admet qu'il est toujours possible de décomposer le vecteur $\overrightarrow{AB}$ en une infinité de déplacements élémentaires $\vec{dl_i}$ tels que:

$$\overrightarrow{AB} = \sum_i \vec{dl_i}$$

Le travail global $W_{AB}$ de la force $\vec{F}$ est la somme de ses travaux élémentaires $\delta W$:

$$W_{AB}\left(\vec{F}\right) = \sum_i \delta W_i = \sum_i \vec{F_i}.\vec{dl_i}$$

# 8- Energie cinétique

## 8.1- Définition

Un objet de masse **m** qui se déplace à une vitesse **v** possède une énergie de mouvement appelée énergie cinétique **$E_C$**.

$$E_C = \frac{1}{2}.m.v^2$$

| |
|---|
| $E_C$: Energie cinétique de l'objet (J) |
| m: Masse de l'objet (kg) |
| v: Vitesse de l'objet ($m.s^{-1}$) |

***Remarque:*** *Comme la vitesse de l'objet dépend du référentiel d'étude, son énergie cinétique en dépendra également.*

## 8.2- Théorème de l'énergie cinétique

La variation d'énergie $\Delta$**$E_C$** cinétique d'un système de masse **m** qui se déplace d'un point ***A*** à un point **B** à la vitesse **v** est égale à la somme $\sum W_{AB}(\vec{F})$ des travaux des forces $\vec{F}$ qui modélisent les actions mécaniques qui s'appliquent sur le solide lors de son déplacement.

$$\Delta E_C = E_C(B) - E_C(A) = \sum W_{AB}(\vec{F})$$

Afin d'utiliser correctement le théorème de l'énergie cinétique, il faut:

- Définir le système et le point choisi pour le modéliser (centre d'inertie).
- Préciser le référentiel dans lequel on étudie le mouvement.
- Dresser le bilan des forces subies par le système en précisant leur notation, leur direction, leur sens et leur valeur.
- Représenter ces forces sur un schéma.
- Ecrire m'expression littérale du théorème de l'énergie cinétique en utilisant les notations de l'énoncé ou en précisant les notations.

## 8.3- Démonstration (pour les matheux)

On se place dans un référentiel galiléen. Cela nous permet d'utiliser la seconde loi de Newton:

$$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = m.\vec{a} = m.\frac{d\vec{v}}{dt}$$

On multiplie les deux termes de cette relation par le déplacement élémentaire $\vec{dl}$:

$$\sum \overrightarrow{F_{ext}}.\vec{dl} = m.\frac{d\vec{v}}{dt}.\vec{dl}$$

D'où:

$$\sum dW(\overrightarrow{F_{ext}}) = m.\frac{d\vec{v}}{dt}.\vec{v}.dt = m.\vec{v}.d\vec{v}$$

Par intégration de cette relation sur un trajet **AB** on obtient:

$$\int_A^B dW\left(\overrightarrow{F_{ext}}\right) = \int_{v_a}^{v_b} m.\vec{v}.d\vec{v}$$

Soit:

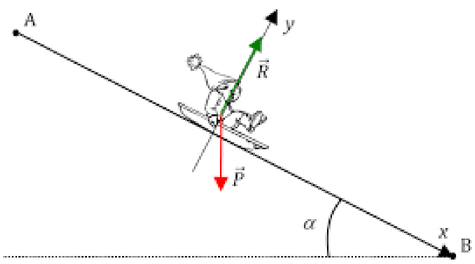
$$\sum \int_A^B \overrightarrow{F_{ext}}.\vec{dl} = m\int_{v_a}^{v_b} d\left(\frac{1}{2}\vec{v}^2\right)$$

Et finalement :

$$\sum W_{AB}(\overrightarrow{F_{ext}}) = \frac{1}{2}.m.v_B^2 - \frac{1}{2}.m.v_A^2$$

### 8.4- Exemple

Une descente en luge s'effectue sans frottements sur une pente de longueur **L** entre **A** et **B**. La pente est caractérisée par un angle **α**. La vitesse initiale en **A** est **$V_A$**.




On veut exprimer la vitesse **$V_B$** en **B**.

On étudie le système dans le référentiel galiléen lié à la pente.

Puisque l'on néglige les frottements, les deux forces en jeux sont:

- Le poids $\vec{P}$ de la luge
- La réaction $\vec{R}$ du support.

On applique le théorème de l'énergie cinétique:

$$\sum W_{AB}(\vec{F}) = \frac{1}{2}.m.V_B^2 - \frac{1}{2}.m.V_A^2$$

Avec:

$$\sum W_{AB}(\vec{F}) = \vec{P}.\overrightarrow{AB} + \vec{R}.\overrightarrow{AB} = \vec{P}.\overrightarrow{AB}$$

Puisque la force de réaction $\vec{R}$ est perpendiculaire au déplacement $\overrightarrow{AB}$, et donc le produit scalaire $\vec{R}.\overrightarrow{AB}$ nul.

Le produit scalaire $\vec{P}.\overrightarrow{AB}$ est donné par la relation:

$$\vec{P}.\overrightarrow{AB} = m.g.L.\sin(\alpha)$$

Nous aurons ainsi:

$$m.g.L.\sin(a) = \frac{1}{2}.m.V_B^2 - \frac{1}{2}.m.V_A^2$$

Soit pour la vitesse $V_B$:

$$V_B = \sqrt{V_A^{\ 2} + 2.g.L.\sin(\alpha)}$$

# 9- Energie potentielle

## 9.1- Energie potentielle de pesanteur

L'énergie potentielle de pesanteur $E_{pp}$ d'un solide en interaction avec la Terre est une grandeur associée à sa position par rapport à la Terre.

Sa variation au cours d'un déplacement du centre d'inertie du solide de l'altitude $z_A$ à l'altitude $z_B$ est l'opposé du travail du poids lors du déplacement:

$$\Delta E_{pp} = -W_{AB}(\vec{P}) = m.g.(z_B - z_A) = E_{pp}(B) - E_{pp}(A) = m.g.z_B - m.g.z_A$$

L'énergie potentielle de pesanteur d'un solide situé à l'altitude $z$ a pour expression:

$$E_{pp}(z) = m.g.z + K$$

La constante $K$ est déterminée de façon que l'énergie potentielle de pesanteur $E_{pp}$ s'annule pour une altitude choisie comme référence.

Pour déplacer le solide par rapport à la Terre, un opérateur doit vaincre l'attraction terrestre. Son action peut être représentée par une force $\overrightarrow{F_{op}} = -\vec{P}$.

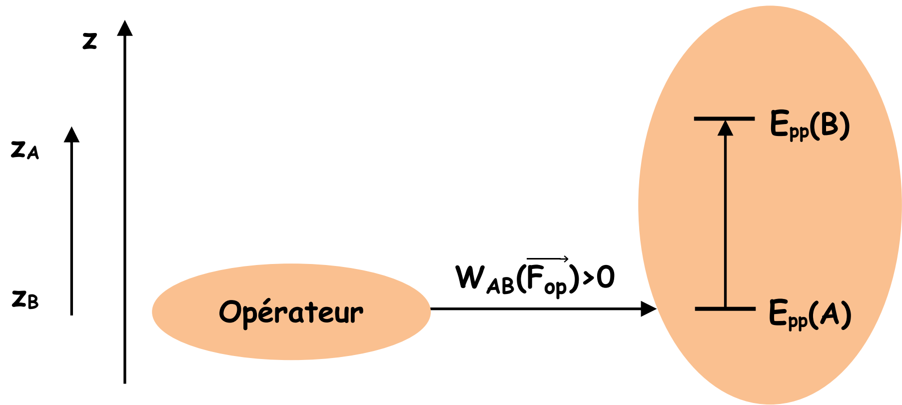
On aura donc:

$$\Delta E_{pp} = E_{pp}(B) - E_{pp}(A) = W_{AB}(\overrightarrow{F_{op}})$$

### 9.2- Cas général

On considère un déplacement du centre d'inertie d'un solide dû à un opérateur extérieur, dont l'action est modélisée par une force $\overrightarrow{F_{op}}$.

La variation d'énergie potentielle du solide liée à la force $\overrightarrow{F_{op}}$ lors de son déplacement entre deux états **A** et **B** dans lesquels le solide est immobile est égale au travail de la force $\overrightarrow{F_{op}}$ pour amener ce solide de **A** à **B**.

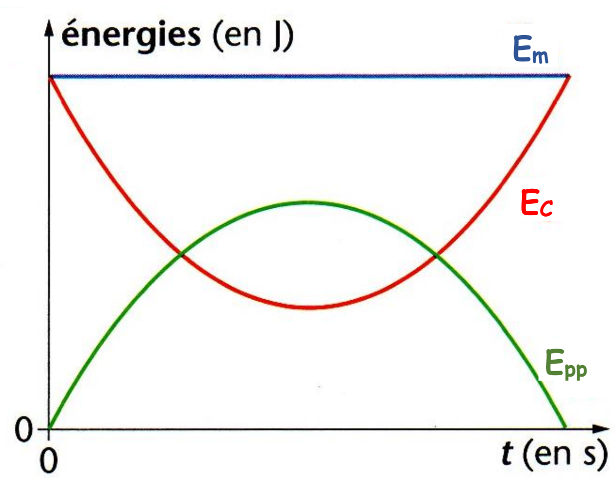



## 10- Energie mécanique

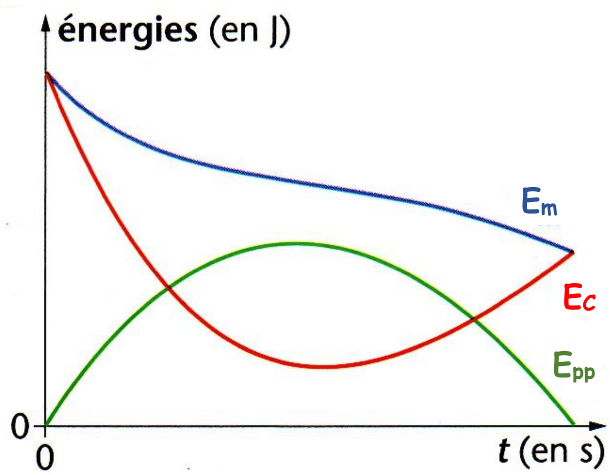
Les diverses formes d'énergie d'un système peuvent être converties les unes en les autres par travail, transfert thermique ou rayonnement.

### 10.1- Conversion des diverses formes d'énergie

On peut étudier l'évolution temporelle des énergies cinétique et potentielle de pesanteur d'une bille d'acier ou de ping-pong dans l'air.




Les frottements sont négligés




Les frottements sont à l'origine de la diminution de l'énergie mécanique

Les résultats obtenus en l'absence de frottements ont montré que lorsque $E_c$ est maximale, $E_{pp}$ est minimale et réciproquement: il y a conversion d'une forme d'énergie en l'autre, par l'intermédiaire du travail du poids.

### 10.2- Conservation de l'énergie mécanique

L'étude de la chute d'un projectile ou du mouvement d'un ressort a démontré que les énergies cinétique et potentielle se compensent.

Dans certaines conditions, la quantité $E_c + E_p$ est constante au cours du mouvement, on l'appelle énergie mécanique du système et on la note $E_m$.

L'énergie mécanique d'un système qui n'est soumis à aucun frottement se conserve: elle est constante au cours du temps.

L'énergie mécanique d'un système qui est soumis à des forces de frottement diminue au cours du temps. Sa diminution est égale au travail des forces de frottement:

$$\Delta E_m = W(\vec{f}) < 0$$

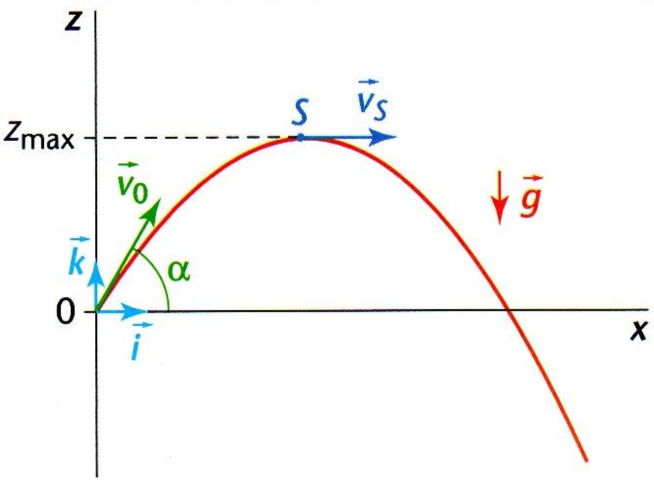
Lors du mouvement d'un système dans un champ de pesanteur ou électrique uniforme, en l'absence de force non conservatrice, l'énergie mécanique $E_m$ du système se conserve. Son énergie cinétique $E_c$ est totalement convertie en énergie potentielle $E_P$ et inversement.

### 10.3- Energie mécanique d'un projectile

L'énergie potentielle de pesanteur $E_{pp}$ a pour expression:

$$E_{pp} = m.g.z$$

On la considère nulle à l'origine de l'axe des altitudes.



Lorsque l'axe **(Oz)** est orienté vers le haut, l'énergie mécanique d'un projectile de masse **m** dans le champ de pesanteur uniforme d'intensité **g** a pour expression:

$$E_m = E_c(t) + E_{pp}(t) = \frac{1}{2}.m.v(t)^2 + m.g.z$$

On lance avec une vitesse initiale $\overrightarrow{V_0}$ faisant un angle $\alpha$ avec l'horizontale, un projectile de masse **m** depuis l'altitude de référence **z=0**.

On considère que le système n'est pas soumis à des forces de frottement.

A l'instant initial on aura:

$$E_m = E_c(0) + E_{pp}(0) = \frac{1}{2}.m.v(0)^2 + 0 = \frac{1}{2}.m.V_0^2$$

Au sommet **S** de la trajectoire, à l'instant $t_S$, on a, $v_S = V_0.\cos\alpha$ d'où:

$$E_m = E_c(t_S) + E_{pp}(t_S) = \frac{1}{2}.m.V_0^2.\cos^2\alpha + m.g.z_{max}$$

L'énergie du système étant constante on aura:

$$\frac{1}{2}.m.V_0^2 = \frac{1}{2}.m.V_0^2.\cos^2\alpha + m.g.z_{max}$$

On en déduit l'altitude maximale atteinte par le projectile:

$$z_{max} = \frac{V_0^2.\sin^2 a}{2.g}$$

Si le système soumis à des forces de frottement, alors l'altitude maximale atteinte est plus faible que dans le cas précédent et l'énergie mécanique du système diminue au cours du temps, elle est dissipée par transfert thermique.